文章编号:1000-4939(2023)06-1308-07

基于扩展有限元法数值模拟双材料界面裂纹问题

苏毅,陈庆远

(郑州航空工业管理学院航空工程学院,450046 郑州)

摘 要:扩展有限元法通过在间断区域引入富集函数,在处理强弱不连续问题上较有限元法有极大的优势。本研究给出了基于扩展有限元法的双材料界面裂纹位移逼近方程及相互作用积分的数值离散方法和单元刚度矩阵的积分策略,材料界面弱不连续性用改进扩展有限元模拟,裂纹贯穿部分用强不连续的 Heaviside 函数模拟,裂纹尖端分别用 2 种不同渐近裂纹尖端富集函数模拟,用 Matlab 编制相应的扩展有限元程序。算例表明,数值模拟结果和参考文献的结果拟合的较好。

关键词:扩展有限元法;改进扩展有限元;Heaviside 函数;渐近裂尖富集函数;相互作用积分;应力强度因子

中图分类号:O346.1 **文献标志码**:A **DOI**:10.11776/j.issn.1000-4939.2023.06.011

Numerical simulation of bimaterial interface cracks using extended finite element method

SU Yi,CHEN Qinyuan

(School of Aeronautical Engineering,Zhengzhou University of Aeronautics,450046 Zhengzhou,China)

Abstract:The extended finite element method (XFEM) has a great advantage over the finite element method (FEM) in dealing with strong and weak discontinuities by introducing enrichment function into discontinuities. In this paper,bimaterial interface craks have been simulated using extended finite element method(XFEM). The displacement approximation equation of bimaterial interface crack is given. The integral method of the interaction integral and the integral strategy of element stiffness matrix are presented. Material discontinuity has been modeled by modified extended finite element method,and the crack penetration is simulated by Heaviside function,the crack tip is simulated by two different asymptotic crack tip enrichment functions,and the corresponding propagation extended finite element program is compiled by Matlab. Good agreement between the numerical results and the reference solutions for bimaterial interface cracks problems is realized.

Key words:extended finite element method;modified extended finite element method;Heaviside function;asymptotic crack tip enrichment function;the interaction integral;the stress intensity factor

收稿日期:2021-12-22 **修回日期**:2022-04-19
基金项目:河南省高等学校重点科研计划资助项目(No. 18B590003);河南省科技攻关资助项目(No. 212102310004;222102320165;232102220028;232102240037)
通信作者:苏毅,讲师。E-mail:94194380@qq.com
引用格式:苏毅,陈庆远. 基于扩展有限元法数值模拟双材料界面裂纹问题[J]. 应用力学学报,2023,40(6):1308-1314.
SU Yi,CHEN Qinyuan. Numerical simulation of bimaterial interface cracks using extended finite element method[J]. Chinese journal of applied mechanics,2023,40(6):1308-1314.

随着机械、航空航天和生物医学应用对多性能需求的(磨损、腐蚀、耐热性和韧性)日益增加,双材料发展已走在前列。双材料的整体力学行为取决于界面的力学性能和断裂/疲劳行为。但因其上下两部分材料的机械性能差异,使得材料界面比较薄弱。因此在实际使用过程中,双材料的断裂破坏,往往表现在界面的破坏。如层合板和薄膜基底界面的脱黏等都是双材料界面问题。应力强度因子是表征界面裂纹是否发展及协助判断扩展方向的重要断裂参数。因此精确的计算应力强度因子尤为重要。求解双材料界面裂纹应力强度因子常用的方法有加料有限元法[1]、边界元法[2-3]、扩展有限元法[4]等数值计算方法。1999 年,BELYTSCHKO 团队[5-6]基于单位分解法在有限元的基础上提出了扩展有限元法。它通过在位移场上对局部强弱不连续区域增加富集函数来描述,使得所使用的网格独立于结构内部物理界面,从而避免了裂纹尖端等高应力区网格划分的困难,在模拟裂纹生长过程中也无需对网格重新划分。扩展有限元法在处理间断、夹杂等强弱不连续问题上的优点使其自被提出来以后,在国际上得到了快速的发展和广泛的应用。SUKUMAR 等[7]用扩展有限元法在模拟孔洞夹杂问题时,用符号距离[8]富集函数来描述材料界面问题,但数值计算收敛性不好。文献[4]用 XFEM 模拟双材料界面裂纹,用跨越界面裂纹尖端的渐近位移场来作为裂纹尖端的 12 个富集函数,但裂纹边界仍然需要沿着材料界面。本研究用文献[9]提出的界面富集函数来模拟界面裂纹的材料界面,用 Heaviside 函数作为贯穿裂纹富集函数,用改进的裂纹尖端渐近位移场基函数作为裂尖富集函数,减少自由度,提高计算效率,同时能够不降低计算精度。为了更好地选择裂尖富集函数,同时采用 2 种不同的裂尖富集函数模拟裂纹尖端位移场的奇异性,并编制 XFEM 程序对界面裂纹进行研究,为了验证程序的有效性,将结果与数值结果进行比较,从而验证程序的精确性。

1　XFEM 的基本原理

1.1　位移逼近方程的建立

扩展有限元法区别于有限元法在于它基于单元分解通过在位移场上增加富集函数来描述不连续问题。本研究为了更好地模拟裂纹,采用文献[5]的方法把裂纹分成裂纹尖端段和裂纹主体段,其中用 Heaviside 函数描述裂纹主体段,用二维渐进裂纹尖端位移场描述裂尖端段。采用文献[9]提出的材料界面富集函数描述双材料界面。双材料界面裂纹如图 1 所示,扩展有限元法的位移逼近方程可以表示为,

$$\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \in K} N_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}_i + \sum_{i \in K} N_j(\boldsymbol{x})H_j(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}_j + \sum_{k \in K_A} N_k(\boldsymbol{x}) \sum_{l=1}^{4} \varphi_k(\boldsymbol{x})\boldsymbol{b}_k^l + \sum_{m \in K_D} N_m(\boldsymbol{x})\psi_m(\boldsymbol{x})\boldsymbol{c}_m \quad (1)$$

式中:$N_i(\boldsymbol{x})$,$N_j(\boldsymbol{x})$,$N_k(\boldsymbol{x})$,$N_m(\boldsymbol{x})$为常规有限元法形函数;$H_i(\boldsymbol{x})$,$\varphi_k(\boldsymbol{x})$,$\psi_i(\boldsymbol{x})$分别为裂纹面,裂纹尖端,双材料界面的富集函数;$K$ 为所有节点集合,K_T、K_A、K_D 分别表示为裂纹面、裂纹尖端、材料界面的增强节点集合;$\boldsymbol{a}_j$、$\boldsymbol{b}_k^l$、$\boldsymbol{c}_m$ 则是由于增强节点而增加的自由度。

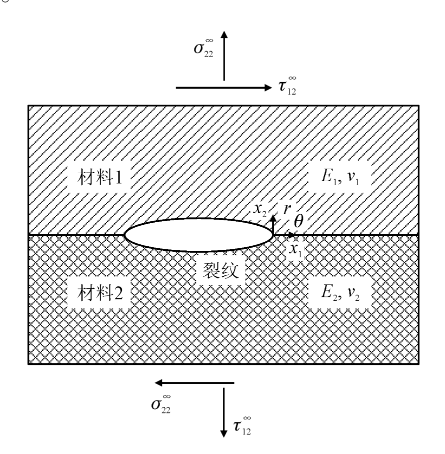


图 1　双材料界面裂纹

Fig. 1　Bimaterial interface crack

裂纹面的富集函数为

$$H_j(\boldsymbol{x}) = H(\xi_\alpha(\boldsymbol{x})) - H(\xi_\alpha(\boldsymbol{x}_j)) \quad (2)$$

$$H(\xi) = \begin{cases} +1, & \xi > 0 \\ -1, & \xi < 0 \end{cases} \quad (3)$$

裂纹尖端的富集函数为

$$\varphi_k(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{x}_k) \quad (4)$$

$$\varphi_k = \left[\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}\right] \quad (5)$$

式中,r、θ 是裂纹尖端局部坐标系中的极坐标,裂纹尖端为极点。

在确保精度的情况下,减少自由度,提高计算效率,根据文献[10]将裂纹尖端富集函数变为

$$\varphi_k = \left[\sqrt{r}\sin(\theta/2 \pm \pi/4)\sqrt{r}\sin\theta\sin(\theta/2 \pm \pi/4)\right] \quad (6)$$

根据文献[11]将裂纹尖端富集函数表示为

$$\varphi_k(\boldsymbol{x})_{k=1,2,\cdots,6} = \{\sqrt{r}\cos(\varepsilon\ln r)\mathrm{e}^{-\varepsilon\theta}\sin(\theta/2 \pm \pi/4),\ \sqrt{r}\cos(\varepsilon\ln r)\mathrm{e}^{\varepsilon\theta}\sin(\theta/2 \pm \pi/4),\ \sqrt{r}\cos(\varepsilon\ln r)\mathrm{e}^{\varepsilon\theta}\sin\theta\sin(\theta/2 \pm \pi/4),\ \sqrt{r}\sin(\varepsilon\ln r)\mathrm{e}^{-\varepsilon\theta}\sin(\theta/2 \pm \pi/4),\ \sqrt{r}\sin(\varepsilon\ln r)\mathrm{e}^{\varepsilon\theta}\sin(\theta/2 \pm \pi/4),\ \sqrt{r}\sin(\varepsilon\ln r)\mathrm{e}^{\varepsilon\theta}\sin\theta\sin(\theta/2 \pm \pi/4)\} \tag{7}$$

ψ_m 为双材料界面函数,根据文献[7]用扩展有限元法首次模拟富集函数,双材料界面的富集函数为

$$\psi_m(\boldsymbol{x}) = \left|\sum_m N_m(\boldsymbol{x})\zeta_m\right| \tag{8}$$

式中,ζ_m 为结点 m 在双材料界面水平集函数中的值。但是由于混合单元(单元中有的结点富集加强,有的结点没有加强)的存在影响了收敛性。

为了克服这个问题,文献[9]提出了如下的富集函数,即

$$\psi_m(\boldsymbol{x}) = \sum_m N_m(\boldsymbol{x})\left|\zeta_m\right| - \left|\sum_m N_m(\boldsymbol{x})\zeta_m\right| \tag{9}$$

$$\zeta_m(\boldsymbol{x}) = \min_{\bar{x}\in f(x)=0} \|\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}\| \operatorname{sign}(f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_i)) \tag{10}$$

式中,$f(\boldsymbol{x})=0$ 为裂纹曲线方程。

模型的加强方式如图2所示。

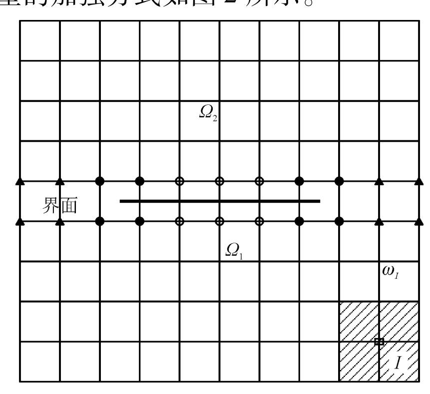


图2 界面裂纹的加强结点

Fig. 2 Enrichment nodes of interface cracks

1.2 XFEM离散方程的建立

将式(1)代入虚功方程,导出XFEM的控制方程为

$$\boldsymbol{K\delta} = \boldsymbol{F} \tag{11}$$

式中:$\boldsymbol{\delta}$ 是结点位移列阵;$\boldsymbol{K}$ 为结构总刚度矩阵;$\boldsymbol{F}$ 为载荷列阵。单元层次上的 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 分别可表示为

$$\boldsymbol{k}_{ij}^e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{ij}^{uu} & \boldsymbol{k}_{ij}^{ua} & \boldsymbol{k}_{ij}^{ub} & \boldsymbol{k}_{ij}^{uc} \\ \boldsymbol{k}_{ij}^{au} & \boldsymbol{k}_{ij}^{aa} & \boldsymbol{k}_{ij}^{ab} & \boldsymbol{k}_{ij}^{ac} \\ \boldsymbol{k}_{ij}^{bu} & \boldsymbol{k}_{ij}^{ba} & \boldsymbol{k}_{ij}^{bb} & \boldsymbol{k}_{ij}^{bc} \\ \boldsymbol{k}_{ij}^{cu} & \boldsymbol{k}_{ij}^{ca} & \boldsymbol{k}_{ij}^{cb} & \boldsymbol{k}_{ij}^{cc} \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{k}_{ij}^{rs} = \int_\Omega (\boldsymbol{B}_i^r)^{\mathrm{T}} D \boldsymbol{B}_j^s \mathrm{d}\Omega \quad (\boldsymbol{r},\boldsymbol{s} = \boldsymbol{u},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \tag{13}$$

单元荷载列阵 $\boldsymbol{f}$ 为,

$$\boldsymbol{f}_i^e = \{\boldsymbol{f}_i^u, \boldsymbol{f}_i^a, \boldsymbol{f}_i^{b1}, \boldsymbol{f}_i^{b2}, \boldsymbol{f}_i^{b3}, \boldsymbol{f}_i^{b4}, \boldsymbol{f}_i^c\} \tag{14}$$

单元荷载力矢量分量表示为

$$\boldsymbol{f}_i^u = \int_{\Gamma_t} N_i \boldsymbol{t} \mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega N_i \boldsymbol{b} \mathrm{d}\Omega \tag{15}$$

$$\boldsymbol{f}_i^a = \int_{\Gamma_t} N_i H \boldsymbol{t} \mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega N_i H \boldsymbol{b} \mathrm{d}\Omega \tag{16}$$

$$\boldsymbol{f}_i^b = \int_{\Gamma_t} N_i \varphi_j \boldsymbol{t} \mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega N_i \varphi_j \boldsymbol{b} \mathrm{d}\Omega \tag{17}$$

$$\boldsymbol{f}_i^c = \int_{\Gamma_t} N_i \psi \boldsymbol{t} \mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega N_i \psi \boldsymbol{b} \mathrm{d}\Omega \tag{18}$$

式中,$\boldsymbol{B}_i^u$、$\boldsymbol{B}_i^a$、$\boldsymbol{B}_i^b$、$\boldsymbol{B}_i^c$ 为形函数的导数矩阵,分别为

常规应变矩阵

$$[\boldsymbol{B}_i^u] = \begin{bmatrix} (N_i)_{,x} & 0 & (N_i)_{,y} \\ 0 & (N_i)_{,y} & (N_i)_{,x} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{19}$$

裂纹贯穿单元附加应变矩阵

$$[\boldsymbol{B}_i^a] = \begin{bmatrix} (N_i H)_{,x} & 0 & (N_i)_{,y} \\ 0 & (N_i H)_{,y} & (N_i H)_{,x} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{20}$$

裂纹尖端单元附加应变矩阵

$$[\boldsymbol{B}_i^b] = \begin{bmatrix} (N_i\varphi_1)_{,x} & 0 & \cdots & (N_i\varphi_m)_{,x} & 0 \\ 0 & (N_i\varphi_1)_{,y} & \cdots & 0 & (N_i\varphi_m)_{,y} \\ (N_i\varphi_1)_{,y} & (N_i\varphi_1)_{,x} & \cdots & (N_i\varphi_1)_{,y} & (N_i\varphi_m)_{,x} \end{bmatrix} \tag{21}$$

材料界面单元附加的应变矩阵

$$[\boldsymbol{B}_i^c] = \begin{bmatrix} (N_i\psi)_{,x} & 0 & (N_i\psi)_{,y} \\ 0 & (N_i\psi)_{,y} & (N_i\psi)_{,y} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{22}$$

1.3 裂纹尖端应力强度因子计算

相互作用积分的形式为

$$I = \int_\Gamma \left[\sigma_{ik}\varepsilon_{ik}^{\mathrm{aux}}\delta_{1j} - \sigma_{ij}u_{i,1}^{\mathrm{aux}} - \sigma_{ij}^{\mathrm{aux}}u_{i,1}\right] n_j \mathrm{d}\Gamma \tag{23}$$

式中:δ_{ij} 是科罗内克尔(Kronecker)记号;u_i^{aux}、$\varepsilon_{ij}^{\mathrm{aux}}$、$\sigma_{ij}^{\mathrm{aux}}$ 分别为辅助位移、应变和应力。

用散度定理将式(23)的线积分转换为面积积分,即

$$I = -\int_A \left[\sigma_{ik}\varepsilon_{ik}^{\mathrm{aux}}\delta_{1j} - \sigma_{ij}u_{i,1}^{\mathrm{aux}} - \sigma_{ij}^{\mathrm{aux}}u_{i,1} \right] q_{,j}\mathrm{d}A \tag{24}$$

式中，q 在裂纹尖端处取1，在边沿 C 处取0，如图3所示。

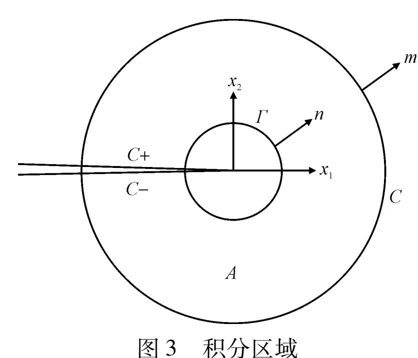


图3　积分区域

Fig. 3　Integral region

应力强度因子和相互作用积分的关系可以表示为

$$I = \frac{2}{E'\cosh^2(\pi\varepsilon)}(K_{\mathrm{I}}K_{\mathrm{I}}^{\mathrm{aux}} + K_{\mathrm{II}}K_{\mathrm{II}}^{\mathrm{aux}}) \tag{25}$$

式中

$$E' = \begin{cases} E, & \text{平面应力} \\ \dfrac{E}{1-v^2}, & \text{平面应变} \end{cases} \tag{26}$$

ε 是双材料的振荡指数，即

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right) \tag{27}$$

参数 α 和 β[4] 描述双材料间的弹性不匹配，且

$$\alpha = \frac{\mu_1(\kappa_2+1)-\mu_2(\kappa_1+1)}{\mu_1(\kappa_2+1)+\mu_2(\kappa_1+1)} \tag{28}$$

$$\beta = \frac{\mu_1(\kappa_2-1)-\mu_2(\kappa_1-1)}{\mu_1(\kappa_2+1)+\mu_2(\kappa_1+1)} \tag{29}$$

式中：μ_i 为材料 $i(i=1,2)$ 的剪切模量；κ_i 为 Kolosov 常数。

$$\kappa_i = \begin{cases} \dfrac{3-v_i}{1+v_i}, \text{平面应力} \\ 3-v, \text{平面应变} \end{cases} \tag{30}$$

式(25)中分别令 $K_{\mathrm{I}}^{\mathrm{aux}}=1, K_{\mathrm{II}}^{\mathrm{aux}}=0$，此时把 I 记为 I_1，或者 $K_{\mathrm{II}}^{\mathrm{aux}}=1, K_{\mathrm{I}}^{\mathrm{aux}}=0$，此时把 I 记为 I_2 可以求得真实场作用下的 K_{I} 和 K_{II}。σ_{ij} 和 $\mu_{i,1}$ 由扩展有限元算得，μ_i^{aux}、$\varepsilon_{ij}^{\mathrm{aux}}$ 和 $\sigma_{ij}^{\mathrm{aux}}$ 由辅助位移场求出。

$$\mu_i = \begin{cases} \dfrac{1}{4\mu_1\cos(\pi\varepsilon)}\sqrt{\dfrac{r}{2\pi}}f_i(r,\theta,\varepsilon,\kappa_1), \text{上半平面} \\ \dfrac{1}{4\mu_2\cos(\pi\varepsilon)}\sqrt{\dfrac{r}{2\pi}}f_i(r,\theta,\varepsilon,\kappa_2), \text{下半平面} \end{cases} \tag{31}$$

当求解 K_{I} 时，辅助位移场为

$$\begin{cases} f_1 = D + 2\delta\sin\theta\sin\varphi \\ f_2 = -C - 2\delta\sin\theta\cos\varphi \end{cases} \tag{32}$$

当求解 K_{II} 时，辅助位移场为

$$\begin{cases} f_1 = -C + 2\delta\sin\theta\cos\varphi \\ f_2 = -D + 2\delta\sin\theta\sin\varphi \end{cases} \tag{33}$$

式中，δ, φ, C, D 定义见文献[11]

辅助应变为

$$\varepsilon_{ij}^{\mathrm{aux}} = \frac{1}{2}(u_{i,j}^{\mathrm{aux}} + u_{j,i}^{\mathrm{aux}}) \quad (i,j=1,2) \tag{34}$$

由辅助位移函数可求得

$$u_{1,1}^{\mathrm{aux}} = A\left(Bf_{1,1} + \frac{r_{,1}f_1}{4\pi B}\right), u_{1,2}^{\mathrm{aux}} = A\left(Bf_{1,2} + \frac{r_{,2}f_1}{4\pi B}\right)$$

$$u_{2,1}^{\mathrm{aux}} = A\left(Bf_{2,1} + \frac{r_{,1}f_2}{4\pi B}\right), u_{2,2}^{\mathrm{aux}} = A\left(Bf_{2,2} + \frac{r_{,2}f_2}{4\pi B}\right) \tag{35}$$

式中：$A = \begin{cases} \dfrac{1}{4\mu_1\cosh(\pi\varepsilon)}, \text{上半平面} \\ \dfrac{1}{4\mu_2\cosh(\pi\varepsilon)}, \text{下半平面} \end{cases}$；$B = \sqrt{\dfrac{r}{2\pi}}$。利用胡克定律，辅助应力场 $\sigma_{ij}^{\mathrm{aux}}$ 可由辅助应变 $\varepsilon_{ij}^{\mathrm{aux}}$ 求得。

2　相互作用积分的数值离散

在 XFEM 中为了很好的运用相互作用积分，式(24)可以被离散为

$$I = \sum_{e=1}^{e_A}\sum_{p=1}^{p_e}\{(\sigma_{ij}^{\mathrm{aux}}u_{j,1} + \sigma_{ij}u_{j,1}^{\mathrm{aux}} - \sigma_{ij}^{\mathrm{aux}}\varepsilon_{jk}\delta_{1i})q_{,j}\}_p|J|_p w_p \tag{36}$$

式中：e_A 是积分区域 A 的单元的数量；p_e 在单元中积分点的数量；$|\boldsymbol{J}|_p$ 为雅克比行列式；w_p 为积分点 p 的权重。实际位移的导数为

$$u_{i,I} = \sum_{i\in K}u_{ii}N_{i,l} + \sum_{k\in K_A}b_{ki}^l\left(N_{k,1}\sum_{i=1}^4\phi_k + N_k\sum_{i=1}^4\phi_{k,1}\right) + \sum_{j\in K_T}a_{ji}N_{j,1}H + \sum_{m\in K_D}c_{mi}(N_{m,1}\psi_m + N_m\psi_{m,1}) \tag{37}$$

对于双材料界面裂纹模型，建立刚度矩阵时，材料属性由积分点处的材料属性确定。由于在形函数的变分矩阵中含有不连续的函数，处理被裂纹分割单元时，文献[9,12-13]给出了积分策略。在本研究中，处理常规单元采用二阶高斯积分，混合单元采用六阶高斯积分，裂纹贯穿单元，需要细分成子三角形单元，而后每个子三角形单元采用三阶高斯积分，而裂纹尖端单元，细分成子三角形单元，每个子三角形

单元采用七阶高斯积分，材料界面单元采用采用六阶高斯积分。

3　数值算例

3.1　双材料板中心界面裂纹

如图 4 所示，模型是高为 $2L=200$ mm，宽为 $2W=100$ mm 的双材料板，其中心有一界面裂纹，板受到拉伸荷载 $\sigma_0=9.8$ MPa 的作用，裂纹长为 $a/W=(0.4,0.8)$，材料泊松比 $\upsilon_1=\upsilon_2=0.3$，假设双材料板处于平面应力状态，材料 1 的弹性模量 $E_1=2.058\times10^5$ MPa，$E_1/E_2=1\sim100$。用将计算得到的 SIFs 通过除以 $K_0=\sigma\sqrt{\pi a}$ 进行无量纲化处理，即 $F_i=K_i/K_0$，并将 MIYAZAKI[14] 和 NAGASHIMA[15] 结果与本研究的计算结果进行比较。

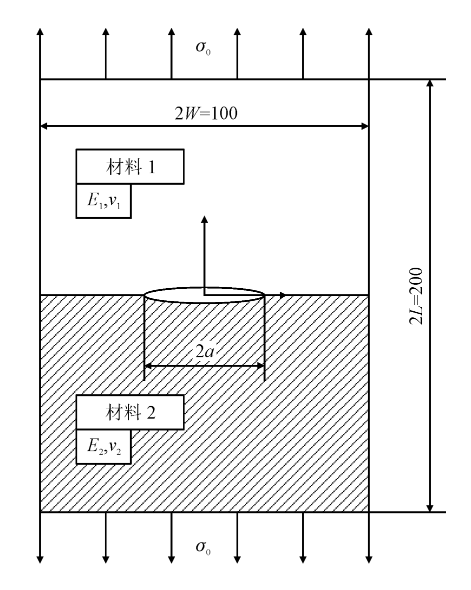


图 4　双材料板中心的界面裂纹(平面应力)

Fig. 4　An interface crack in the center of a bimaterial plate (plane stress)

从图 5～6 可以看出，本研究用式(6)和式(7)作为界面裂纹尖端富集函数计算的无量纲应力强度因子与 MIYAZAKI[14]、NAGASHIMA[15] 结果近似。说明用式(6)和式(7)都可以作为双材料界面裂纹裂纹尖端富集函数，相比之下，式(7)结果更优，这是因为式(7)能够更好地模拟界面裂纹尖端位移场。F_1 的绝对值随着 $\lg(E_1/E_2)$ 的增大而减小，而 F_2 的绝对值随之增加。F_i 的绝对值随裂纹长度的增加而增加。

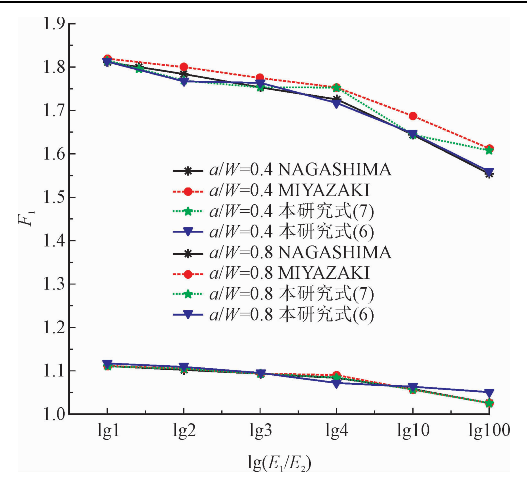


图 5　中心界面裂纹 F_1 的变化

Fig. 5　F_1 of a center interface crack

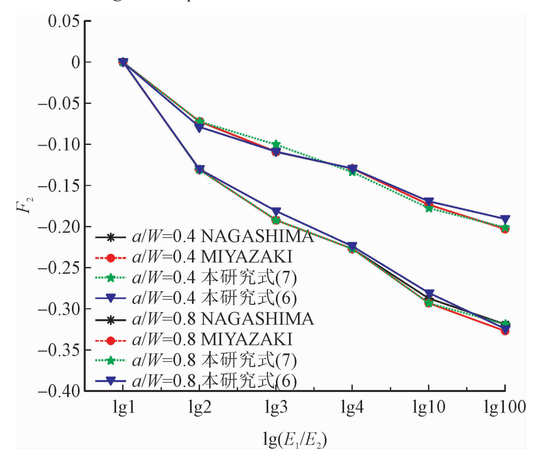


图 6　中心界面裂纹 F_2 的变化

Fig. 6　F_2 of a center interface crack

3.2　无限大双材料板中心界面裂纹问题

如图 7 所示，一个二维弹性双材料平板上边界和下边界受单向偏远拉伸载荷 $\sigma=1$ MPa 作用，左右边界受到水平位移约束 $u_1=0$ mm，在模型中间有长度为 $2a$ 的中心裂纹。板尺寸为 $2L\times2L$，$2L=60$ mm；$a=1$ mm；$E_1=1\times10^3$ MPa；$E_1/E_2=2\sim1\,000$。根据文献[4]的研究，当 $L/a>20$ 时，该板被认为是无限大板。$\upsilon_1=\upsilon_2=0.3$，假设板处于平面应变状态。计算裂纹尖端应力强度因子 K_i，无量纲化 $F_i=K_i/K_0$，其中 $K_0=\sigma\sqrt{\pi a}$。并将 SUKUMAR[4] 和 RICE[16] 结果与本研究的计算结果进行比较。

从图 8～9 可以看出，本研究用式(6)和式(7)作为界面裂纹尖端富集函数计算的无量纲应力强度因子 F_i 与参考文献结果近似，F_1 的吻合效果一般较 F_2 会好点，同样用式(7)模拟的结果更好一些。但是在精度要求不高的情况下，可以选择式(6)。随

着 $\lg(E_1/E_2)$ 的增大,F_i 的绝对值随之增加。

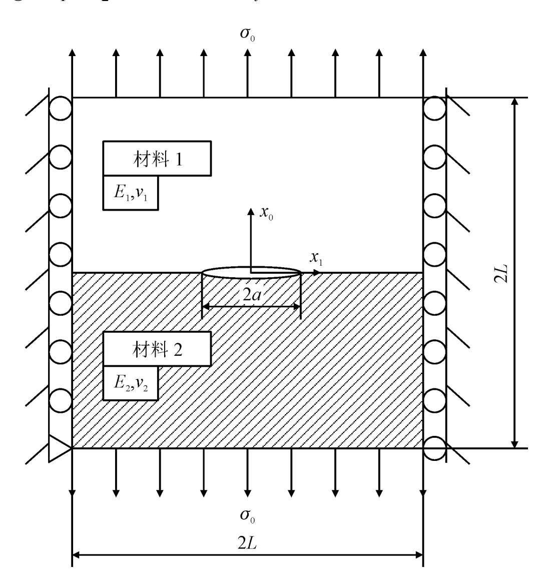


图 7　双材料板内界面裂纹(平面应变)

Fig. 7　An interface crack in the center of a bimaterial plate(plane strain)

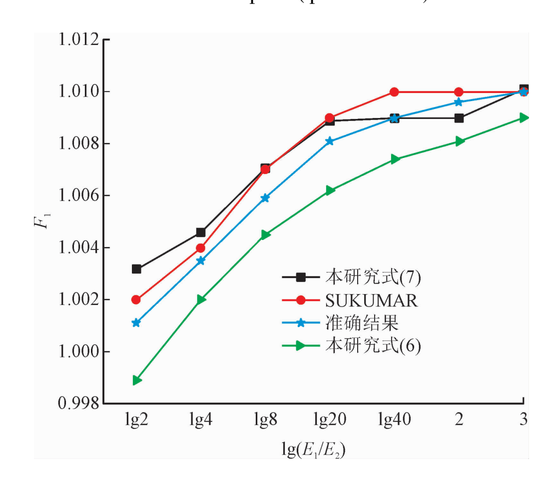


图 8　中心界面裂纹 F_1 的变化

Fig. 8　F_1 of a center interface crack

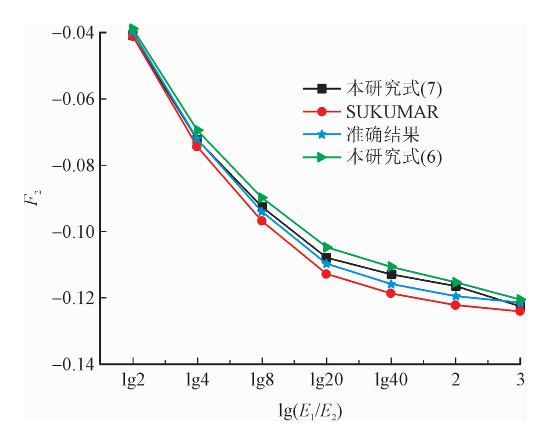


图 9　中心界面裂纹 F_2 的变化

Fig. 9　F_2 of a center interface crack

4　结　论

本研究介绍了扩展有限元在双材料界面裂纹上的应用。在求解界面裂纹的应力强度因子时用界面富集函数描述界面,裂尖位移场用两种不同富集函数模拟。数值模拟的结果与参考文献符合地较好,但当选用 6 个裂纹尖端富集函数精度更加高,这是因为选用的裂纹尖端富集函数是由双材料界面裂纹裂纹尖端渐近位移场的解析解的基函数在不损失精度的条件下变换的富集函数,但 6 个富集函数计算量大,而用 2 个计算量小,精度稍有降低。

参考文献:

[1]　杨军辉,雷勇军,蒙上阳. 双材料界面裂纹的加料有限元方法[J]. 国防科技大学学报,2015,37(3):115-120.
YANG Junhui,LEI Yongjun,MENG Shangyang. Enriched finite element method for dissimilar material interface crack[J]. Journal of National University of Defense Technology,2015,37(3):115-120 (in Chinese).

[2]　HE W J,BOLANDER J E JR,LIN D S,et al. A boundary element for crack analysis at a bimaterial interface[J]. Engineering fracture mechanics,1994,49(3):405-410.

[3]　张明,姚振汉,杜庆华,等. 双材料界面裂纹应力强度因子的边界元分析[J]. 应用力学学报,1999,16(1):23-28.
ZHANG Ming,YAO Zhenhan,DU Qinghua,et al. Boundary element analysis of stress intensity factors of bimaterial interface crack [J]. Chinese journal of applied mechanics,1999,16(1):23-28 (in Chinese).

[4]　SUKUMAR N,HUANG Z Y. PRÉVOST J H,et al. Partition of unity enrichment for bimaterial interface cracks[J]. International journal for numerical methods in engineering,2004,59(8):1075-1102.

[5]　BELYTSCHKO T,BLACK T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing[J]. International journal for numerical methods in engineering,1999,45(5):601-620.

[6]　MOËS N,DOLBOW J,BELYTSCHKO T. A finite element method for crack growth without remeshing[J]. International journal for numerical methods in engineering,1999,46(1):131-150.

[7]　SUKUMAR N,CHOPP D L,MOËS N,et al. Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering,2001,190(46/47):6183-6200.

[8]　DUNDURS J. Discussion:“Edge-Bonded Dissimilar Orthogonal Elastic Wedges Under Normal and Shear Loading” (Bogy,D. B.,1968,ASME J. Appl. Mech.,35,pp. 460-466)[J]. Journal of ap-

plied mechanics,1969,36(3):650-652.

[9] 江守燕,杜成斌.一种XFEM断裂分析的裂尖单元新型改进函数[J].力学学报,2013,45(1):134-138.
JIANG Shouyan,DU Chengbin. A novel enriched function of elements containing crack tip for fracture analysis in XFEM[J]. Chinese journal of theoretical and applied mechanics,2013,45(1):134-138(in Chinese).

[10] 苏毅,王生楠,鲁龙坤.用广义扩展有限元计算界面裂纹应力强度因子[J].北京航空航天大学学报,2016,42(6):1162-1168.
SU Yi,WANG Shengnan,LU Longkun. SIFs of interfacial crack using generalized extended finite element method[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics,2016,42(6):1162-1168(in Chinese).

[11] MOËS N,CLOIREC M,CARTRAUD P,et al. A computational approach to handle complex microstructure geometries[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering,2003,192(28/29/30):3163-3177.

[12] LABORDE P,POMMIER J,RENARD Y,et al. High-order extended finite element method for cracked domains[J]. International journal for numerical methods in engineering,2005,64(3):354-381.

[13] MOUSAVI S E,XIAO H,SUKUMAR N. Generalized gaussian quadrature rules on arbitrary polygons[J]. International journal for numerical methods in engineering,2010,82(1):99-113.

[14] MIYAZAKI N,IKEDA T,SODA T,et al. Stress intensity factor analysis of interface crack using boundary element method:Application of virtual crack extension method[J]. JSME international journal. series a,mechanics and material engineering,1993,36(1):36-42.

[15] NAGASHIMA T,OMOTO Y,TANI S. Stress intensity factor analysis of interface cracks using X-FEM[J]. International journal for numerical methods in engineering,2003,56(8):1151-1173.

[16] RICE J R. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks[J]. Journal of applied mechanics,1988,55(1):98-103.

（编辑 史淑英）

